Examen du baccalauréat **Session principale**

Session de Juin 2014

Section : Sciences techniques

Épreuve : Mathématiques

Exercice 1

1)	2)	3)	4)
b	a	c	a

1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+2^n}{3+2^n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2^n(\frac{1}{2^n}+1)}{2^n(\frac{3}{2^n}+1)}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{2^n}+1}{\frac{3}{2^n}+1}=1$, car $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2^n}=0$.

2) $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{e-1}{e}\right)^n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{e}\right)^n=0$, car $0<1-\dfrac{1}{e}<1$.

3) X suit une loi exponentielle de paramètre 0,2.

On a donc pour tout réel positif t, $p(X>t)=e^{-0,2t}$. D'où $p(X>10)=e^{-0,2\times10}=e^{-2}=0,135...$

L'arrondi au centième de $p(X>10)$ est égal à 0,14.

4) Y suit une loi binomiale de paramètres $n=8$ et $p=\dfrac{1}{3}$.

L'écart type $\sigma(Y)=\sqrt{8\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}}=\sqrt{\dfrac{16}{9}}=\dfrac{4}{3}$.

Exercice 2

1) Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): 2z^2-(1+i(\sqrt{3}-2))z+\sqrt{3}-i=0$.

a) Vérifions que (-i) est une solution de l'équation (E) :

$2(-i)^2-(1+i(\sqrt{3}-2))(-i)+\sqrt{3}-i=-2+i-(\sqrt{3}-2)+\sqrt{3}-i=-2+i-\sqrt{3}+2+\sqrt{3}-i=0$.

D'où (-i) est une solution de l'équation (E).

b) Soit z_2 l'autre racine de l'équation (E).

- On peut utiliser la somme des racines :

$$-i+z_2=\frac{1}{2}(1+i(\sqrt{3}-2)) \Rightarrow z_2=i+\frac{1}{2}(1+i(\sqrt{3}-2))$$

$$\Rightarrow z_2=\frac{1}{2}(1+2i+i(\sqrt{3}-2))$$

$$\Rightarrow z_2=\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

www.bac.org.tn

- On peut utiliser le produit des racines :

$(-i).z_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{3}-i) \Rightarrow z_2 = \frac{1}{(-i)}\frac{1}{2}(\sqrt{3}-i) = \frac{1}{2}i(\sqrt{3}-i) = \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}.$

c) $z_1 = -i = \cos(\frac{-\pi}{2}) + i\sin(\frac{-\pi}{2}) = e^{-i\frac{\pi}{2}}.$

$z_2 = \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3}) = e^{i\frac{\pi}{3}}.$

2) Les points A(a) ; B(b) ; E(1) et F(–i) où $a = \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $b = \frac{1+\sqrt{3}}{2}(-1+i).$

a) Voir figure.

$a = \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}} = \left[1, \frac{\pi}{3}\right]$. D'où la construction du point A.

b) $b-a = \frac{1+\sqrt{3}}{2}(-1+i) - (\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})$

$= -\frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$= -1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = i(i+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}) = i(i+a) = i(a+i).$

Ainsi on a : $b-a = i(a+i).$

c) $b-a = i(a+i) \Rightarrow \frac{b-a}{a+i} = i$

$\Rightarrow \arg\left(\frac{b-a}{a-(-i)}\right) \equiv \arg(i)[2\pi]$

$\Rightarrow (\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

$\Rightarrow (\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AB}) + \pi \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

$\Rightarrow (\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AB}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

$\Rightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

D'où le triangle ABF est rectangle en A.

$b-a = i(a+i) \Rightarrow |b-a| = |i(a+i)|$

$\Rightarrow |b-a| = |i||a+i|$

$\Rightarrow |b-a| = |a-(-i)|$

$\Rightarrow AB = AF$

D'où le triangle ABF est isocèle de sommet principal A.

Ainsi le triangle ABF est rectangle et isocèle en A.

www.bac.org.tn

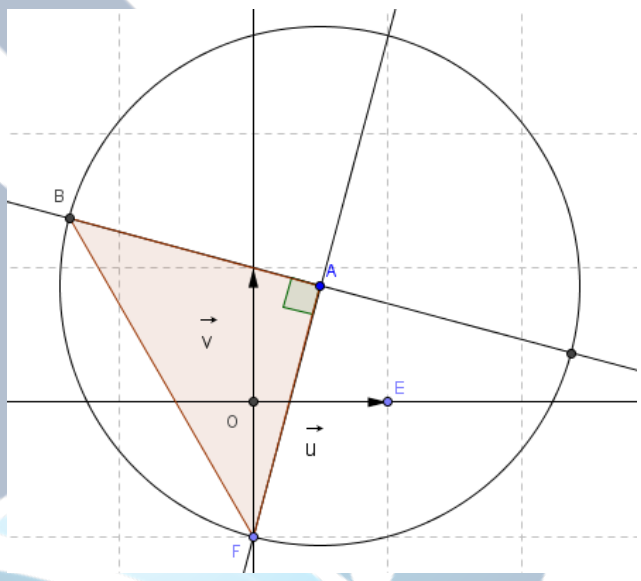
3) Le triangle ABF est rectangle et isocèle en A.

On a $AB = AF$, d'où le point B appartient au cercle (C) de centre A et passant par F.

$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AF}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$, d'où B appartient à la droite Δ perpendiculaire à (AF) en A.

Ainsi B appartient à l'intersection de Δ et (C).

Cette intersection contient deux points, mais un seul point vérifie $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AF}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.



Exercice 3

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Les points $A(2,0,1)$, $B(0,2,1)$ et $C(1,2,0)$.

1)a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\end{pmatrix}$.

b) $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$, d'où les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et par conséquent les points A, B et C ne sont pas alignés. D'où ils déterminent un plan P dont un vecteur normal est $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.

Ainsi une équation de P est de la forme $-2x-2y-2z+c=0$.

$A(2,0,1)\in P \Rightarrow -2\times 2-2\times 0-2\times 1+c=0$

$\Rightarrow c=6.$

$P: -2x-2y-2z+6=0$

$P: x+y+z-3=0.$

Autrement : il suffit de vérifier que chacun des points A, B et C vérifie l'équation du plan $P: x+y+z-3=0$ et puisque les points ne sont pas alignés donc P est le plan qu'ils déterminent.

www.bac.org.tn

2) Soit S la sphère d'équation : $S: x^2+y^2+z^2=5$.

a) $2^2+0^2+1^2=5 \Rightarrow A(2,0,1)\in S$; $0^2+2^2+1^2=5 \Rightarrow B(0,2,1)\in S$.

$1^2+2^2+0^2=5 \Rightarrow C(1,2,0)\in S$.

b) Le plan P est déterminé par les points A, B et C. La sphère S passe par ces trois points. D'où l'intersection de la sphère S avec le plan P est le cercle circonscrit au triangle ABC.

3) $D\left(\sqrt{\frac{5}{3}},\sqrt{\frac{5}{3}},\sqrt{\frac{5}{3}}\right)$. Q le plan passant D et parallèle au plan P.

a) Le plan Q est parallèle au plan P, d'où une équation cartésienne du plan Q est de la forme $x+y+z+c=0$.

$D\left(\sqrt{\frac{5}{3}},\sqrt{\frac{5}{3}},\sqrt{\frac{5}{3}}\right)\in Q \Rightarrow 3\sqrt{\frac{5}{3}}+c=0 \Rightarrow c=-3\sqrt{\frac{5}{3}}$. Ainsi $Q: x+y+z-3\sqrt{\frac{5}{3}}=0$.

b) On a O est le centre de la sphère S. Calculons la distance de O au plan Q :

$d(O,Q)=\frac{\left|3\sqrt{\frac{5}{3}}\right|}{\sqrt{3}}=\frac{3}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{5}{3}}=\sqrt{5}$ = le rayon de la sphère. D'où le plan Q est tangent à la sphère S.

$\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^2=\frac{5}{3}+\frac{5}{3}+\frac{5}{3}=5$. D'où le point D appartient à la sphère S.

Par conséquent le plan Q est tangent à la sphère S au point D.

4) Soit $M(x,y,z)$ un point de l'espace n'appartenant pas au plan P.

a) $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-2\\y\\z-1\end{pmatrix}$

$(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AM}=-2(x-2)-2y-2(z-1)=-2x-2y-2z+6$.

b) Le volume V du tétraèdre MABC :

$V=\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AM}\right|=\frac{1}{6}\left|-2x-2y-2z+6\right|=\frac{\left|x+y+z-3\right|}{3}$.

c) Soit $M(x,y,z)$ un point du plan Q. On a $x+y+z-3\sqrt{\frac{5}{3}}=0$.

$x+y+z-3\sqrt{\frac{5}{3}}=0 \Rightarrow x+y+z=3\sqrt{\frac{5}{3}}$

$\Rightarrow V=\frac{\left|x+y+z-3\right|}{3}=\frac{\left|3\sqrt{\frac{5}{3}}-3\right|}{3}=\left|\sqrt{\frac{5}{3}}-1\right|=\sqrt{\frac{5}{3}}-1$.

www.bac.org.tn

Exercice 4

f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $\begin{cases} f(x) = x\,(1-\ln x)^2 + 1 \ ; \ \text{si } x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

(C) la courbe représentative f de dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x(1-\ln x)^2 + 1 = +\infty$; car $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x(1-\ln x)^2+1}{x} = \lim_{x\to+\infty} (1-\ln x)^2 + \frac{1}{x} = +\infty.$$

D'où la courbe (C) admet une branche parabolique de direction l'axe $(O,\vec{j})$.

2)a) $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln^2 x = \lim\limits_{x\to0^+} (\sqrt{x}\ln x)^2 = \lim\limits_{x\to0^+} (\sqrt{x}\ln(\sqrt{x})^2)^2$

$= \lim\limits_{x\to0^+} (2\sqrt{x}\ln\sqrt{x})^2 = 0$; car $\lim\limits_{t\to0^+} t\ln t = 0$

b) $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} x(1-\ln x)^2 + 1$

$= \lim\limits_{x\to0^+} x(1-2\ln x + \ln^2 x) + 1$

$= \lim\limits_{x\to0^+} x - 2\,x\ln x + x\ln^2 x + 1$

$= 1$; car $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln x = 0$ et $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln^2 x = 0$.

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = 1 = f(0)$, d'où f est continue à droite en 0.

c) $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to0^+} \frac{f(x)-1}{x} = \lim\limits_{x\to0^+} (1-\ln x)^2 = +\infty$; car $\lim\limits_{x\to0^+} \ln x = -\infty$

D'où f n'est pas dérivable à droite en 0.

La courbe (C) admet au point d'abscisse 0 une demi-tangente verticale dirigée vers les y positifs.

3) Γ est la courbe de la fonction dérivée f ' de f.

a) Le signe de f ' est donné par la position de la courbe Γ par rapport à l'axe des abscisses. On a :

x	0		$\frac{1}{e}$		e		$+\infty$
$f'(x)$	+	0		–	0	+	

Le tableau de variation de f :

x	0		$\frac{1}{e}$		e		$+\infty$
$f(x)$	1	↗	$f(\frac{1}{e})$	↘	1	↗	$+\infty$

www.bac.org.tn

$$f(\frac{1}{e}) = \frac{1}{e}(1-\ln(\frac{1}{e}))^2 + 1 = \frac{4}{e} + 1$$

b) On remarque que la courbe Γ de f' admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1. Donc f'' s'annule en 1.

D'après la courbe Γ la fonction f' est décroissante dans $]0,1[$ et croissante dans $[1,+\infty[$, donc f'' change de signe de part et d'autre de 1.

f'' s'annule en 1 en changeant de signe, d'où le point d'abscisse 1, c'est-à-dire A, est un point d'inflexion pour la courbe (C) de f.

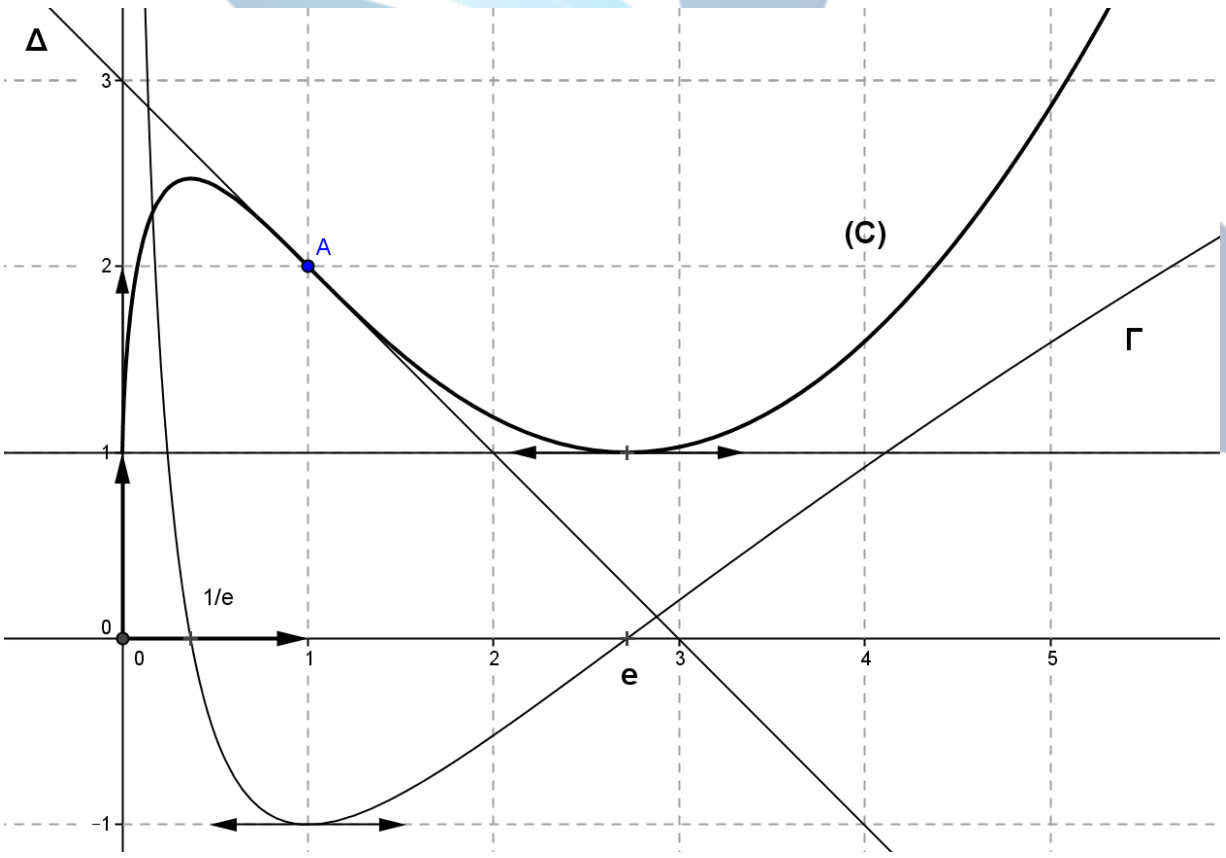
4) Voir figure.

5) Soit $0 < \lambda < 1$.

A_λ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe Γ de la fonction dérivée f', l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \lambda$ et $x = \frac{1}{e}$.

$$A_\lambda = \int_\lambda^{\frac{1}{e}} f'(x)\,dx = [f(x)]_\lambda^{\frac{1}{e}} = f(\frac{1}{e}) - f(\lambda) = \frac{4}{e} + 1 - f(\lambda).$$

$$\lim_{\lambda \to 0^+} A_\lambda = \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{4}{e} + 1 - f(\lambda) = \frac{4}{e} + 1 - 1 = \frac{4}{e}\ ;\ \text{car } \lim_{\lambda \to 0^+} f(\lambda) = 1.$$



www.bac.org.tn